(17) $\frac{2Bs}{5}, \quad \frac{2Cs}{5}.$

Donc S sera compris entre les limites

(18) $\mu\frac{ns}{2B}, \quad \mu\frac{ns}{2C}.$

D'ailleurs, le polyèdre ci-dessus mentionné étant convexe, et renfermé entre les sphères décrites avec les rayons

$$r, \quad r(1+\varepsilon)$$

la surface nS du polyèdre sera comprise entre les limites

$$4\pi r^2, \quad 4\pi r^2(1+\varepsilon)^2,$$

et les projections B, C seront renfermées entre les surfaces de grands cercles

$$\pi r^2, \quad \pi r^2(1+\varepsilon)^2.$$

Donc les expressions (18) seront comprises entre les limites

$$\mu\frac{4\pi r^2}{2\pi r^2(1+\varepsilon)^2}, \quad \mu\frac{4\pi r^2(1+\varepsilon)^2}{2\pi r^2},$$

ou, ce qui revient au même, entre les limites

$$\frac{2\mu}{(1+\varepsilon)^2}, \quad 2\mu(1+\varepsilon)^2;$$

qui, l'une et l'autre, diffèrent très peu de 2μ, quand ε est très petit, et, si l'on prend 2μ pour valeur approchée de S, l'erreur commise ne dépassera pas le produit de 2μ par la plus grande des différences

$$1-\frac{1}{(1+\varepsilon)^2}, \quad (1+\varepsilon)^2-1,$$

c'est-à-dire, par l'expression (18). Le théorème 9 étant ainsi démontré pour le cas où la quantité S se réduit à une surface plane s, il suffira, pour le démontrer dans le cas contraire, de décomposer S en éléments infiniment petits.

Corollaire 1er. Si le polyèdre mentionné dans le théorème 9 se réduit à l'un des cinq polyèdres réguliers, et si l'on nomme

$$1-\varepsilon', \quad 1+\varepsilon''$$

les quotients qu'on obtient en divisant la surface de ce polyèdre régulier par le quadruple de la projection maximum ou minimum de ce polyèdre, l'erreur que l'on commettra en prenant 2π pour valeur de S sera inférieure au produit de 2π par le plus grand des nombres ε', ε''. Au reste cette proposition subsistera encore, si le polyèdre cessait d'être régulier.

Corollaire 2. Si le nombre n devient infini, on aura évidemment

(20) $$\mathfrak{A} = \frac{\int_{-\pi}^{\pi}\int_{0}^{\pi} A \sin p \, dp \, dq}{\int_{-\pi}^{\pi}\int_{0}^{\pi} \sin p \, dp \, dq} = \frac{1}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{0}^{\pi} A \sin p \, dp \, dq,$$

attendu que

$$\sin p \, dp \, dq$$

représente l'élément différentiel de la surface de la sphère décrite avec le rayon 1. Des équations (19) et (20) on déduit immédiatement la formule (9).

Corollaire 3. Si S représente un système de surfaces qui soit renfermé dans l'intérieur d'une sphère décrite avec le rayon R, et qui ne puisse être traversé par une droite en plus de $2m$ points, on aura évidemment

$$A < 2m . \pi R^2$$

et par suite

$$S < m . 4\pi R^2 .$$

On peut donc énoncer la proposition suivante.

6e Théorème. Si, dans l'intérieur d'une sphère décrite avec le rayon R, on trace un système de surfaces qui ne puisse être coupé par une droite en plus de $2m$ points, la somme des aires de ces surfaces ne dépassera pas le produit de la surface de la sphère par le nombre $2m$.

Paris ce 22 octobre 1872.



(17) $$\frac{2Bs}{5}, \quad \frac{2Cs}{5}.$$

Donc S sera compris entre les limites

(18) $$\mu\frac{ns}{2B}, \quad \mu\frac{ns}{2C}.$$

D'ailleurs, le polyèdre ci-dessus mentionné étant convexe, et renfermé entre les sphères décrites avec les rayons

$$r, \quad r(1+\varepsilon)$$

la surface ns du polyèdre sera comprise entre les limites

$$4\varpi r^2, \quad 4\varpi r^2(1+\varepsilon)^2,$$

et ses projections B, C devront renfermer entre les surfaces de grands cercles

$$\varpi r^2, \quad \varpi r^2(1+\varepsilon)^2.$$

Donc les expressions (18) devront comprises entre les limites

$$\mu\frac{4\varpi r^2}{2\varpi r^2(1+\varepsilon)^2}, \quad \mu\frac{4\varpi r^2(1+\varepsilon)^2}{2\varpi r^2},$$

ou, ce qui revient au même, entre les limites

$$\frac{2\mu}{(1+\varepsilon)^2}, \quad 2\mu(1+\varepsilon)^2;$$

qui, l'une et l'autre, diffèrent très peu de 2μ, quand ε est très petit, et, si l'on prend 2μ pour valeur approchée de S, l'erreur commise ne dépassera pas le produit de 2μ par la plus grande des différences

$$1-\frac{1}{(1+\varepsilon)^2}, \quad (1+\varepsilon)^2-1,$$

c'est-à-dire, par l'expression (13). Le théorème 1 étant ainsi démontré pour le cas où la quantité S se réduit à une surface plane s, il suffira, pour le démontrer dans le cas contraire, de décomposer S en éléments infiniment petits.

Corollaire 1er. Si le polyèdre mentionné dans le théorème 1 se réduit à l'un des cinq polyèdres réguliers, et si l'on nomme

$$1-\varepsilon', \quad 1+\varepsilon''$$

les quotients qu'on obtient en divisant la surface de ce polyèdre régulier par le quadruple de la projection maximum ou minimum de ce polyèdre; l'erreur que l'on commettra en prenant 2Π pour valeur de S sera inférieure au produit de 2Π par le plus grand des nombres $\varepsilon', \varepsilon''$. Au reste cette proposition subsistera encore, si le polyèdre cessait d'être régulier.

Post-Scriptum

On pourrait donner du théorème 4 une démonstration analogue à celle du théorème 1'. en considérant d'abord le cas où l'on remplacerait les quantités S, A par une surface plane s et par la projection a de cette surface sur le plan HIK ; puis, en décomposant, dans le cas contraire, les surfaces S, A en éléments infiniment petits et correspondants. On peut aussi déduire le théorème 4 d'une proposition analogue au théorème 2, et dont voici l'énoncé.

5e Théorème. Les mêmes choses étant posées que dans le théorème 4, construisons un polyèdre convexe dont les faces équivalentes entre elles soient comprises entre deux sphères concentriques décrites avec les rayons

$$r, \quad r(1+\varepsilon),$$

ε désignant une quantité positive, et nommons $\mathfrak{A}$ la moyenne arithmétique entre les n valeurs de A correspondantes aux plans de ces mêmes faces. On aura sensiblement, pour de petites valeurs de ε,

(15) $$S = 2\mathfrak{A},$$

et l'erreur que l'on commettra en prenant $2\mathfrak{A}$ pour valeur approchée de S sera inférieure au produit de $2\mathfrak{A}$ par la différence

(16) $$(1+\varepsilon)^2 - 1.$$

Démonstration. Soient s une surface plane renfermée dans un plan quelconque, a la projection absolue de s sur le plan d'une face du polyèdre, et μ la moyenne arithmétique entre les n valeurs de a qui correspondent aux plans des différentes faces. Si la surface s est équivalente à l'aire φ de chaque face du polyèdre, a représentera non seulement la projection absolue de s sur le plan d'une face, mais aussi la projection de cette face sur le plan de s, et par suite $n\mu$ sera la double de la projection absolue du polyèdre sur le plan de s. Cela posé, soient

$$B, \quad C$$

la plus petite et la plus grande des valeurs que puisse acquérir la projection du polyèdre sur un plan quelconque. On aura, dans l'hypothèse admise,

$$n\mu > 2B, \quad n\mu < 2C,$$

et, si s cesse d'être équivalent à φ, $n\mu$ se trouvera compris entre les limites

$$\mathcal{S} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{0}^{\pi} A \sin p \, dp \, dq \tag{9}$$

Corollaire. Lorsque S représente une surface plane, la quantité A se réduit à la projection absolue de cette surface sur le plan HIK. Lorsque S représente une surface fermée et convexe, A se réduit au double de la projection de cette surface sur le plan HIK.

Exemple. Si S représente la surface de l'ellipsoïde qui a pour équation

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \tag{10}$$

A sera la section transversale du cylindre circonscrit à l'ellipsoïde, et dont les arêtes sont parallèles à la droite OO'. Soit R le rayon de l'ellipsoïde parallèle à cette même droite, et α, β, γ les angles qu'elle forme avec les demi-axes des coordonnées positives. On aura

$$\cos\alpha = \cos p, \quad \cos\beta = \sin p \cos q, \quad \cos\gamma = \sin p \sin q \tag{11}$$

$$\frac{1}{R^2} = \frac{\cos^2\alpha}{a^2} + \frac{\cos^2\beta}{b^2} + \frac{\cos^2\gamma}{c^2}; \tag{12}$$

et l'équation du cylindre ci-dessus mentionné deviendra

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - R^2\left(\frac{x\cos\alpha}{a^2} + \frac{y\cos\beta}{b^2} + \frac{z\cos\gamma}{c^2}\right)^2 = 1. \tag{13}$$

Or, la section faite dans le cylindre par le plan des $x\,y$ étant l'ellipse qui a pour équation

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - R^2\left(\frac{x\cos\alpha}{a^2} + \frac{y\cos\beta}{b^2}\right)^2 = 1,$$

l'aire de cette section sera

$$\frac{\pi abc}{R\cos\gamma}$$

et par conséquent l'aire de la section faite par un plan perpendiculaire aux arêtes sera $\frac{\pi abc}{R}$. On aura donc

$$A = \frac{2\pi abc}{R}, \qquad \mathcal{S} = abc\int_{-\pi}^{\pi}\int_{0}^{\pi}\frac{\sin p \, dp \, dq}{R}. \tag{14}$$

Dans le cas particulier où l'ellipsoïde se réduit à une sphère on a $R = a = b = c$, et par suite, comme on devait s'y attendre, $\mathcal{S} = 4\pi R^2$.
Ajoutons que, si dans la seconde des formules (14) on substitue la valeur de R tirée des formules (11), (12), on pourra effectuer dans tous les cas l'intégration relative à p, et réduire ainsi la valeur de S à une intégrale simple. L'intégration s'effectuera complètement, si l'ellipsoïde est de révolution.

<u>Corollaire 2e</u>. Si le nombre n devient infini, on aura évidemment

$$(6) \qquad \mathcal{K} = \frac{\int_{-\pi}^{\pi} A\,dp}{\int_{-\pi}^{\pi} dp} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} A\,dp,$$

et la formule (2) se réduira, comme on devait s'y attendre, à la formule (1).

On déduit immédiatement du théorème 2 un troisième théorème qu'on peut énoncer comme il suit

<u>3e Théorème</u>. Si dans l'intérieur d'un cercle décrit avec le rayon R, on trace une ou plusieurs courbes fermées et, que le système de ces courbes ne puisse être traversé par une même droite en plus de $2m$ points, la somme des contours ou périmètres de ces courbes ne dépassera pas le produit de la circonférence $2\pi R$ par le nombre m.

<u>Démonstration</u>. En effet, dans l'hypothèse admise, on aura évidemment, quel que soit p,

$$A < 2m.2R,$$

et par suite la formule (2) donnera

$$(7) \qquad S < m.2\pi R.$$

<u>Corollaire</u>. Si S se réduit au périmètre d'une courbe convexe et renfermée dans le cercle décrit avec le rayon R, on aura $m=1$, et la formule (7) donnera, comme on devait s'y attendre

$$(8) \qquad S < 2\pi R.$$

Des théorèmes analogues à ceux qui précèdent peuvent être appliqués à la quadrature des surfaces courbes et démontrés de la même manière. Nous nous contenterons d'énoncer ici l'un d'entre eux duquel tous les autres se déduisent facilement

<u>4e Théorème</u>. p désignant l'angle formé par une droite quelconque OO' avec un axe fixe OI, q l'angle formé par le plan des deux droites OI, OO' avec un plan fixe qui renferme la première, S le système d'une ou de plusieurs surfaces planes ou courbes, et A la somme des projections absolues des divers éléments de S sur un plan HIK perpendiculaire à la droite OO', on aura

puis on en conclurra, en posant $x = \frac{\pi}{2n}$,

$$n^2\left\{1-\frac{\sin\frac{\pi}{2n}}{\left(\frac{\pi}{2n}\right)}\right\} = \frac{\pi^2}{24}\cos\theta x < \frac{\pi^2}{24} < 1.$$

D'autre part, le développement de tang x suivant les puissances ascendantes de x ne renfermant que des termes positifs, pour $x > 0$, et subsistant pour toutes les valeurs de x inférieures à $\frac{\pi}{2}$, la fonction

$$\frac{1}{x^2}\left(\frac{\tan x}{x}-1\right)$$

croîtra avec x depuis $x=0$ jusqu'à $x=\frac{\pi}{2}$, et par suite le produit

$$n^2\left\{\frac{\tan\frac{\pi}{2n}}{\left(\frac{\pi}{2n}\right)}-1\right\}$$

décroîtra pour des valeurs croissantes de n. Or pour $n=3$, ce produit devient

$$\frac{9}{\pi}\left(2\sqrt{3}-\pi\right) < 3\left(2\sqrt{3}-\pi\right) = \sqrt{108} - 3\pi < 1.$$

Le 2e théorème étant ainsi démontré dans le cas particulier où la quantité S se réduit à une longueur rectiligne s, il suffira, pour le démontrer dans le cas contraire, de décomposer S en éléments infiniment petits.

Corollaire 1er. La valeur approchée de S étant calculée à l'aide de la formule (2), l'erreur commise ne dépassera pas la neuvième partie de cette valeur, si l'on prend $n=3$, la vingt-cinquième partie, si l'on prend $n=5$, et la centième partie, si l'on prend $n=10$. Dans le premier et le second cas, M sera la moyenne arithmétique entre les sommes des projections des éléments de S sur trois ou cinq droites respectivement parallèles aux côtés d'un hexagone ou d'un décagone régulier.

Exemple. Si la longueur S est égale et parallèle à l'un des côtés d'un hexagone régulier, on trouvera $M = \frac{2}{3}S$, et par suite

$$\frac{1}{2}\pi M = \frac{\pi}{3} S = 1,047\ldots S.$$

Or la différence entre le nombre 1,047... et l'unité est effectivement inférieure à $\frac{1}{9}$.

OO', et p la moyenne entre les n valeurs de a qui correspondent aux n droites mentionnées dans le 2e théorème. $2np$ sera la somme des projections absolues de s sur les $2n$ côtés d'un polygone régulier parallèles deux à deux à ces mêmes droites, ou, ce qui revient au même, np sera la projection absolue sur un de ces côtés d'un second polygone régulier semblable au premier, mais qui aurait pour côté la longueur s. Or, si l'on nomme R le rayon du cercle circonscrit à ce dernier polygone, son apothème sera

$$R \cos \frac{\pi}{2n},$$

et son côté

$$s = 2R \sin \frac{\pi}{2n},$$

tandis que sa projection sur une droite quelconque sera comprise entre le diamètre du cercle circonscrit et le diamètre du cercle inscrit, c'est à dire entre les limites

$$2R = \frac{s}{\sin \frac{\pi}{2n}}, \qquad 2R \cos \frac{\pi}{2n} = \frac{s}{\operatorname{tang} \frac{\pi}{2n}}.$$

Donc le produit np sera compris entre ces limites, et s entre les suivantes

(4) $$np \sin \frac{\pi}{2n}, \qquad np \operatorname{tang} \frac{\pi}{2n};$$

qui, pour de grandes valeurs de n se réduisent sensiblement à

(5) $$\frac{1}{2}\pi p.$$

Ajoutons que, si l'on prend l'expression (5) pour valeur approchée de s, l'erreur commise sera inférieure au produit de cette expression par la plus grande des différences

$$1 - \frac{\sin \frac{\pi}{2n}}{\left(\frac{\pi}{2n}\right)}, \qquad \frac{\operatorname{tang} \frac{\pi}{2n}}{\left(\frac{\pi}{2n}\right)} - 1,$$

et que ces deux différences, pour $n =$ ou > 3, seraient l'une et l'autre inférieures à $\frac{1}{n^2}$. Effectivement, si l'on nomme θ un nombre compris entre les limites $0, 1$, on aura, en vertu des formules connues,

$$\sin x = x - x^3 \frac{\cos \theta x}{6}, \qquad \frac{1}{x^2}\left(\frac{\sin x}{x} - 1\right) = \frac{\cos \theta x}{6},$$

se réduit à la projection absolue de cette longueur sur la droite OO'. Lorsque S représente une courbe fermée et convexe, en sorte qu'elle ne puisse être coupée par une droite en plus de deux points, A se réduit au double de la projection de cette courbe sur OO'.

Exemples. Si S représente la circonférence d'un cercle décrit avec le rayon R, A sera évidemment le double du diamètre. On aura donc $A = 4R$, et la formule (1) donnera

$$S = \int_{-\pi}^{\pi} R\, dp = 2\pi R.$$

Si S représente le périmètre de l'ellipse dont les demi-axes a, b sont le premier parallèle, le second perpendiculaire à l'axe fixe, on aura

$$A = 4\sqrt{a^2\cos^2 p + b^2\sin^2 p},$$
$$S = \int_{-\pi}^{\pi} \sqrt{a^2\cos^2 p + b^2\sin^2 p}\, dp,$$

etc..

2e Théorème. Les mêmes choses étant posées que dans le théorème précédent, soient menées par un point du plan OO'O'' n droites qui comprennent entre elles des angles égaux, et nommons M la moyenne arithmétique entre les n valeurs de A correspondantes à ces n droites. On aura sensiblement, pour de grandes valeurs de n,

(2) $$S = \tfrac{1}{2}\pi M;$$

et l'erreur que l'on commettra, en prenant le produit $\tfrac{1}{2}\pi M$ pour valeur de S, sera inférieure au rapport qui existe entre ce produit et le carré de n, c'est-à-dire, à

(3) $$\frac{1}{2}\,\frac{\pi M}{n^2},$$

pourvu que le nombre entier n surpasse 2.

Démonstration. Ce théorème se déduit sans peine du précédent, et peut encore se démontrer de la manière suivante.

Soit s une longueur rectiligne, a sa projection absolue sur la droite

Mémoire

sur la rectification des courbes et la quadrature des surfaces courbes

par M. Augustin Cauchy

membre de l'Académie des Sciences de l'Institut de France, de la Société Royale de Londres, etc....

Les formules que j'ai récemment obtenues pour la résolution directe des équations de tous les degrés, et qui sont mentionnées dans la gazette piémontaise du 22 Septembre, fournissent les moyens non seulement de développer dans tous les cas en séries convergentes les racines réelles ou imaginaires d'une équation donnée, mais encore de fixer les limites des erreurs commises quand on arrête les séries convergentes après un certain nombre de termes. Or la fixation de ces limites est fondée en partie sur quelques théorèmes relatifs à la rectification des courbes, et dont la connaissance peut être fort utile dans un grand nombre de questions diverses ainsi que dans la géométrie pratique. Je vais énoncer en peu de mots ceux qui me paraissent les plus dignes d'être remarqués.

1er Théorème. p désignant l'angle polaire que forme une droite tracée à volonté dans un plan avec un axe fixe, S la longueur d'une ou de plusieurs longueurs mesurées sur une ou plusieurs lignes droites ou courbes fermées ou non fermées, A la somme des projections absolues des divers éléments de S sur la droite OO', et π le rapport de la circonférence au diamètre, on aura

$$S = \frac{1}{4}\int_{-\pi}^{\pi} A\, dp. \qquad (1)$$

Démonstration. On démontre aisément ce théorème, en considérant d'abord le cas où l'on remplacerait les quantités S, A par une longueur rectiligne s et par la projection a de cette longueur sur la droite OO', puis en décomposant dans le cas contraire les longueurs S, A en éléments infiniment petits et correspondants.

Corollaire. Lorsque S représente une longueur rectiligne, la quantité A ...

3)

Mémoire

sur la rectification des courbes et la quadrature des surfaces courbes,

par M. Augustin Cauchy

membre de l'Académie des sciences de l'Institut de France,

de la Société Royale de Londres, etc.....



Paris le 19 octobre 1832.

